Instabilitätsphänomene in der Technik: Erkenntnisfortschritt durch Computer?

Krätzig, Wilfried B.

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1991 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.223-236

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Instabilitätsphänomene in der Technik: Erkenntnisfortschritt durch Computer?

Von **W. B. Krätzig**

Sehr verehrte Herren Präsidenten,
Magnifizenzen,
meine sehr verehrten Damen und Herren,

den Beschluß des Konzils der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, mir die Carl-Friedrich-Gauß-Medaille für 1991 zuzuerkennen, habe ich – wie ich Ihnen, Herr Präsident Oberbeck, im Februar schrieb – mit großer Freude, Überraschung, aber auch mit Skepsis aufgenommen. Ich bin mir der großen Ehre bewußt, die dieser hohen Auszeichnung zukommt. Dennoch gestatten Sie mir, auch hier meine Skepsis nicht zu unterdrücken, ob wirklich die eigenen Beiträge zum wissenschaftlichen Erkenntnisfortschritt den hohen Maßstäben Ihrer Gesellschaft gerecht werden können. In jedem Fall wird die mir widerfahrene Ehre stets Verpflichtung zu weiterem wissenschaftlichen Bemühen sein.

Bitte lassen Sie mich nicht ohne einen herzlichen Dank an Herrn Kollegen Duddeck für die freundliche Laudatio nun zu meinem Vortrag kommen. Ich bin mir des schmalen Grates bewußt, auf dem ich wandeln muß. Dabei hoffe ich, weder in die Spalten und Klüfte eines Fachvortrages abzustürzen noch in die Schründe der Trivial-Wissenschaft.

1. Einführung

Wenn eine wissenschaftliche Akademie ein neues Mitglied wählt oder die Forschungen eines Kollegen ehrt, so ist dies stets ein Prozeß selbstbezüglichen Urteilens: Die Wertmaßstäbe der Gemeinschaft werden auf den Kandidaten projiziert und dieser nach ihnen beurteilt. Ingenieure würden diesen Entscheidungsprozeß als ein selbstregelndes, nichtlineares System modellieren. Sie wissen, daß parametergesteuerte Rückkopplungen am ehesten ein optimales Betriebsverhalten einzuregeln in der Lage sind: Jedes erreichte Niveau beeinflußt das nächste, prinzipiell bessere. Derartige kreative, d.h. sich selbst optimierende Systeme besitzten jedoch einen schwerwiegenden Nachteil: Ihre Neigung zur Instabilität, zum Kollaps, zum Chaos. Und damit wären wir mitten in meinem Thema: der Instabilität von Systemen.

Welcher Art sind Phänomene, die wir mit dem Begriff der Instabilität belegen? Unsere gesamte Zivilisation beruht weitgehend auf dem Postulat planmäßigen, d.h. stabilen Funktionierens der unser Leben begleitenden Systeme. Oberflächlich betrachtet mögen Instabilitätsphänomene daher etwas Seltenes, Sonderbares, Exzeptionelles darstellen. Doch sie begleiten die Schöpfung und alles Menschenwerk, wie wir noch sehen werden, wie eine permanente Erinnerung an das vorweltliche Chaos. Hier einige Beispiele.

Durch die Plattentektonik der Erdkruste beispielsweise wirken auf die einzelnen Platten gigantische, aber unterschiedliche Kräfte. In den sie trennenden Spalten und Verwerfungszonen bauen sich dadurch kontinuierlich und stetig Scherspannungen auf, die zu kontinuierlichen gegenseitigen Bewegungen führen können. Aber immer besteht auch die latente Möglichkeit eines plötzlichen Überschreitens der Scherfestigkeit der Gesteinszonen. Das während vieler Jahre stabil erscheinende Fließgleichgewicht zweier Platten wird plötzlich instabil, und das angesammelte Energiepotential in Bewegung umgesetzt: Ein Erdbeben mit all seinen katastrophalen Folgen für die betroffenen Menschen überführt als Instabilitätsphänomen das bisherige Gleichgewicht in ein neues.

Oder denken Sie an eine der großen, stählernen Fachwerk-Eisenbahnbrücken, wie sie am Ende des 19. Jahrhunderts gebaut wurden: an die 180 m weit gespannte Bogenbrücke über die Wupper bei Müngsten oder an die Trisannabrücke der Arlbergbahn, einen 120 m spannenden Parabel-Fachwerkträger. Ihre einzelnen stabartigen Träger sind aus dem Eigengewicht der Konstruktion und den Nutzlasten der fahrenden Züge im wesentlichen durch Zug- oder Druckkräfte beansprucht. Alle druckbeanspruchten Stäbe besitzten nun ab einer bestimmten Lastgrenze, der Knicklast, nicht nur die Möglichkeit zur planmäßigen Fortsetzung der bisherigen Lastabtragung, sondern auch die latente Alternative zum Ausknicken. Wegen der sich beim Knickvorgang ausbildenden großen Deformationen des Gesamttragwerks schalten die entwerfenden Ingenieure diese Alternative allerdings durch hinreichende Sicherheiten aus.

Sicher wird jeder Leser schon einmal erlebt haben, daß eine solche ältere Brücke in einen Langsamfahrbereich eingebettet ist. Bestimmte Lasteintragungsfrequenzen des fahrenden Zuges, welche die gesamte Struktur pulsierend beanspruchen würden, könnten nämlich den Indifferenzpunkt des Ausknickens bei hohen Zuggeschwindigkeiten auf ein unzulässig niedriges, unter der erforderlichen Sicherheit liegendes Niveau herunterziehen.

Instabilitätserscheinungen beobachten wir auch bei lebenden Organismen. Über lange Zeiten mögen die Zellen eines Organismus alle in ihren Erbanlagen codierten Aufgaben plangemäß erfüllen und sich termingerecht reproduzieren. Sie befinden sich im Zustand eines dynamischen Gleichgewichtes. Plötzlich, ohne erkennbaren äußeren Anlaß, erhöhen einige Zellen ihre Reproduktionsfrequenz und teilen sich fortlaufend: sie werden kanzerös. Der betroffene Teil des Organismus verläßt seinen bisherigen Gleichgewichtszustand offensichtlich auf dem Wege einer Instabilität.

Wie schließlich finden Sie dieses Beispiel? Ein hoher Staatsbeamter, vermutlich ein Polizeipräfekt, ist mit mehreren Mitarbeitern dienstlich unterwegs [1]. Ihr gemeinsames Ziel ist die Strafverfolgung einer glaubensrevolutionären Sekte in Tarsus. Dieser Mitvierziger, als systemtreuer Karrieretyp geschildert, ist offenbar seit langem mit sich und seiner Aufgabe im Gleichklang, besser: im Gleichgewicht. In der staubigen Einöde der Landstraße sinniert er über sein bisheriges Leben. Kurz vor Damaskus kumuliert seine seelische Ambivalenzsituation in einer Erscheinung: eine Stimme spricht zu ihm, er erblindet. In den folgenden drei Tagen stellt er seinen Lebensplan radikal um. Das Augenlicht wieder gewinnend, schließt er sich, persönliche Nachteile bis hin zur Lebensgefahr in Kauf nehmend, der ehemals verfolgten Sekte an und wird in den ihm verbleibenden 31 Lebensjahren ihr bedeutendster Missionar: Ein extremer Fall einer Persönlichkeits-Indifferenzsituation, einer seelischen Instabilität mit unerwartetem Ausgang.

Was ist allen diesen Phänomenen gemeinsam? Offensichtlich ist es die latente Verfügbarkeit einer zweiten Alternative zur plötzlichen, sprunghaften Änderung des Systemverhaltens bei nur geringfügig veränderter äußerer Umgebung. Zweifellos erwartet unser Urteilsvermögen auf weiche, stetige Änderungen der Einwirkungsparameter auch immer weiche, stetige Änderungen der Systemantwort, gewissermaßen die stabile Alternative. Jede plötzliche, sprunghafte Veränderung ohne eine vorrausgehende, gleichartige Einwirkungsmodifikation empfinden wir als ungewöhnlich, als Instabilität.

Stabilität ist offenbar eine für das planmäßige Verhalten technischer und anderer Systeme überaus wichtige Eigenschaft. Sie ist dadurch definiert, daß geringfügige Modifikationen der Eingangsgrößen auch nur geringfügige Modifikationen des Antwortverhaltens bewirken. Dieses als schwach stabil bezeichnete Verhalten wird durch sogenannte grenzstabile Phänomene übertroffen, wenn aufgetretene Antwortmodifikationen darüber hinaus im Laufe der Zeit aus dem System wieder herausdämpfen, wenn der Apostel Paulus am Ende seiner Persönlichkeitskrise eben doch wieder zum Saulus zurückgekehrt wäre. Jedes andere Verhalten bezeichnet man zu Recht als instabil.

Was nun hat die Instabilität technischer Systeme mit den im Thema ausdrücklich genannten Computern zu tun? Offensichtlich stellen Instabilitätsphänomene Störungen des Betriebsverhaltens von Systemen dar. Oft genug sind Gefährdungen der Systemumgebung mit ihnen verbunden. Daher ist es fast immer das Ziel, sie in technischen Systemen zuverlässig zu beherrschen und möglichst von vornherein auszuschließen. Hierzu dienen in vielen Bereichen des Ingenieurwesens Computersimulationen.

Computer sind bekanntlich überaus leistungsfähige, programmgesteuerte Rechenautomaten, algebraische Maschinen, deren Aufgaben ein Berechnungsprogramm steuert. Implementiert man in ein derartiges Programm die physikalischen Gesetzmäßigkeiten eines zu analysierenden Systems einschließlich seiner möglichen Instabilitätseigenschaften, so kann das Betriebsverhalten des Systems im Computer simuliert werden. Nehmen wir als Beispiel das Knicken der Druckstäbe der eingangs erwähnten Fachwerk-Eisenbahnbrücken. Bei der Computersimulation derartiger Knickinstabilitäten, wie sie vom Fachmann bezeichnet werden, muß kein einziges Gramm wirkliches Blech verbeult werden, um den Instabilitätskollaps des Systems realitätsnah und im Detail zu studieren.

Doch nicht nur reale, d.h. experimentell nachprüfbare Kollapsinstabilitäten lassen sich in Computern simulieren, sondern darüber hinaus die gesamte Fülle latenter, also möglicher Instabilitätsphänomene. Bitte vergegenwärtigen Sie sich außerdem die vielfältigen Visualisierungstechniken moderner Computer, das Anhalten von simulierten

Prozessen, ihr Rückwärtslaufenlassen, so dürfte auch dem Laien verständlich werden, daß Computersimulationen beim Studium von Instabilitätsphänomenen erheblich tiefere Einsichtsmöglichkeiten gestatten als physische Experimente. Hat sich also unsere Erkenntnistiefe im Hinblick auf Instabilitätsphänomene durch diese Maschinen generell vertieft?

Immanuel Kant, der große Einsiedler aus Königsberg, hat den Naturwissenschaften vor 210 Jahren die Augen dafür geschärft, daß wissenschaftliche Erkenntnis durch das Zusammenwirken unserer Sinne und unseres Verstandes entsteht. Um es (fast) mit seinen Worten zu wiederholen [2]: „Ein Begriff ohne die Anschauung durch die Sinne ist leer, die Anschauung ohne Begriffe jedoch blind. Der Verstand allein vermag nichts anzuschauen, und die Sinne vermögen nichts zu denken: Nur dadurch, daß sie sich vereinigen, kann Erkenntnis entspringen."

Nun haben Computer und die auf ihnen aufbauenden modernen Informationstechniken unsere sinnliche Erfahrungswelt auf vielen Gebieten ohne jeden Zweifel erheblich erweitert. Daher liegt die Vermutung nahe, daß sie damit auch automatisch zu einer Vertiefung ingenieurwissenschaftlicher Erkenntnisse im angesprochenen Bereich geführt haben.

Zur Untersuchung dieser Fragestellung möchte ich Ihnen im folgenden einige Gedanken im Hinblick auf Instabilitätsphänomene der Technik vorstellen. Instabilitätsphänomene zählen seit zwei Jahrzehnten zu den interessantesten Forschungsgebieten in den Natur- und Technikwissenschaften. Nach dieser Einführung beabsichtige ich daher die Behandlung noch dreier weiterer Themenkreise: Zunächst soll das Wesen von Instabilitätsphänomenen der Technik an Hand weiterer Beispiele noch detaillierter erläutert werden. Danach werden wir unsere Kenntnisse über die zugrundeliegenden, nichtlinearen Feldtheorien etwas genauer analysieren, und schließlich sollen Instabilitäten in periodisch erregten, nichtlinearen Systemen behandelt werden.

In den Beispielen möchte ich mich im wesentlichen auf Problemstellungen der Strukturmechanik konzentrieren, meinem engeren Arbeitsgebiet, und die Übertragung in die eigenen Interessensphären dem Leser überlassen. Die Strukturmechanik ist ein Teilgebiet der Mechanik, die ihrerseits nicht nur die wichtigste theoretische Grundlage unserer gesamten Technik darstellt; sie ist auch, um eine Bemerkung William Hamiltons aufzugreifen: „Wissenschafts-Poesie". So beurteilte Hamilton das Konzept der analytischen Mechanik von Joseph Louis Lagrange [3], das 1788 in Paris erstpubliziert wurde, aber in Berlin entstanden war, an dessen Akademie der Wissenschaften Lagrange seit 1767 als Nachfolger von Leonhard Euler wirkte.

2. Stabilität und Instabilität technischer Systeme

Lassen Sie uns nun etwas detaillierter auf einige spezielle Instabilitätsphänomene der Technik eingehen. Einführend hatten wir ein System als stabil definiert, wenn es auf geringfügige Modifikationen der Eingangsgrößen nur mit gringfügigen, qualitativ gleichartigen Modifikationen der Systemantwort reagiert.

Stellen Sie sich zur näheren Erläuterung einen mehrfach gestützten, stählernen Kranbahnträger vor. Er möge einen hohen I-Querschnitt besitzen, mit oberem und unterem Flansch sowie eingeschweißtem Steg. Dieser Kranbahnträger sei mit seinen stählernen Stützen ebenfalls biegesteif verschweißt. Die Kranbrücke stehe in der Mitte einer Stützweite unter Last, wodurch der Kranbahnträger – für den Außenstehenden kaum erkennbar – in Lastrichtung meßbar durchgebogen wird. Offensichtlich stellen die Radlasten der Kranbrücke die Einwirkungen des Systems dar; als charakteristische Systemantwort wird von mir die erwähnte vertikale Durchbiegung gewählt. Erfolgt nun eine geringfügige Erhöhung der Kranlast, so möge auch die Durchbiegung geringfügig zunehmen. Gemäß der Aussage unseres Stabilitätskriteriums ist somit das System in dieser Phase stabil. Solange Stabilität herrscht, wird jeder weitere kleine Lastanstieg mit einem weiteren kleinen Durchbiegungszuwachs beantwortet werden.

Bauingenieure besitzen nun Techniken, sich in das Innere mechanischer Systeme hineindenken zu können. Durch sie wissen wir, daß die Druckspannungen im oberen Flansch des Kranbahnträgers ein beträchtliches Energiepotential aufbauen. Hierdurch gewinnt der Obergurt bei einem bestimmten Lastniveau die Fähigkeit, wie ein achsial belasteter dünner Stab plötzlich in Feldmitte horizontal auszuweichen. Der triviale, nach wie vor mögliche Lastpfad kann so in den instabilen Lastpfad verzweigen. Hieran könnte ihn nur die Drillsteifigkeit des Gesamtquerschnitts hindern, die aber bei hohen Trägern hierfür nicht ausreicht. So scheint der Kranbahnträger in Feldmitte zu kippen, obwohl er nach wie vor auf seinen Kranbahnstützen unverschieblich ruht: Er versagt in einer Biegedrillknick-Instabilität und zwar lange bevor Materialversagen auftritt.

Die letzte kleine Laststeigerung, welche gerade die Instabilitätsgrenze überschreitet, würde das System des Kranbahnträgers daher in einen indifferenten Zustand überführen, aus welchem es sich statt mit einer kleinen zusätzlichen Vertikaldurchbiegung mit hoher Wahrscheinlichkeit durch horizontales Ausweichen des Obergurtes befreit, d.h. durch Kippen des Trägers. Da der schrägliegende, gekippte Querschnitt eine geringere Biegesteifigkeit als der ursprüngliche besitzt, ist das Gleichgewicht irreparabel gestört und das System wird in einem Prozeß großer Deformationen kollabieren: Eine geringfügige Lasterhöhung hat somit zu einer qualitativ und quantitativ völlig anderen Systemantwort geführt, unerwartet, und aus den bisher mit dem Kranbahnsystem gewonnenen Erfahrungen unvorhersagbar: ein typisches Instabilitätsphänomen! Heute kann der Prozeß in seinen für Ingenieure wesentlichen Phasen und Aussagen im Computer simuliert werden, er stellt eine mit großen Deformationen verbundene Instabilität dar, ein hochgradig nichtlinear verlaufendes Phänomen.

Derartige quasi-statische, d.h. ohne Berücksichtigung der Zeitkomponente modellierte Instabilitätsphänomene sind bereits seit fast 250 Jahren bekannt und, an einfachsten Tragsystemen, erforscht worden. Der eben im Zusammenhang mit Lagrange erwähnte Leonhard Euler publizierte 1744 als Königlicher Professor in Berlin in seiner berühmten Abhandlung „De Curvis Elasticis“ [4] verschiedene analytische Lösungen des Balkenbiegeproblems. Einer der untersuchten Fälle beschreibt das Ausknicken des geraden, achsial belasteten Stabes, das klassische Instabilitätsproblem der Strukturmechanik. Dabei löste er erstmalig ein Eigenwertproblem, um die nach ihm benannte Formel für die Knicklast zu entwickeln. Seit dieser Zeit gehört die Eulersche Knickformel zum festen Wissensbestand von Festigkeitsingenieuren, um Stabknickungsinstabilitäten in Tragwerken mit Sicherheit ausschließen zu können. Doch trotz dieser 250 Jahre langen curricularen Tradition hat die systematische Behandlung von Instabilitätsproblemen in der Mechanik lange ein Schattendasein geführt. Mit den Ursachen dieses schwach ausgeprägten Forschungsinteresses, dieser morganatischen Behandlung von Instabilitätsphänomenen als etwas Absonderlichem, Unnatürlichem, bestenfalls technisch Kuriosem, werden wir uns noch auseinanderzusetzen haben. Zunächst soll noch ein Beispiel einer weiteren Klasse von Instabilitätsphänomenen erläutert werden, sogenannte kinetische Instabilitäten.

Anfang der 60er Jahre begannen die Amerikaner, den Weltraumvorsprung der Sowjetunion aufzuarbeiten. Ihre erste große eigenständige Raketenentwicklung hierzu war die Titan II; mit einer Bauhöhe von 33 m war sie als Träger des GEMINIsystems aus einer militärischen Interkontinentalrakete hervorgegangen. Die meisten Leser erinnern sich sicher noch an die spannenden Landungen der GEMINI-kapsel an drei Fallschirmen in den Ozeanen und die abenteuerlichen, fernsehlife erlebten Bergungsaktionen.

Bei den ersten unbemannten Starts der Titan II übermittelten die Telemetriedaten nun ein unbekanntes und völlig unverständliches Phänomen: Der planmäßigen, monoton zunehmenden Beschleunigung des Projektils durch die beiden Raketenmotoren vom bis zum 4-fachen der Erdbeschleunigung überlagerten sich während der gesamten Antriebsphase länger andauernde, achsiale Pulsationen von maximal 2,5 g in einer Frequenz von ca. 10 Hz. Derartig starke Vibrationen würden die Gesundheit jedes Astronauten auf das Höchste gefährden, vor allem aber die tragende Struktur der Rakete bis zur Zerstörung schädigen können. Wie war dieses Phänomen zu erklären?

Derartige Interkontinentalraketen sind äußerst leicht konstruierte und daher hochgradig deformierbare Strukturen. Während der Startphase in der erdnahen Atmosphäre werden sie von Windböen getroffen, ein völlig unproblematischer Vorgang, da die durch sie entstehenden Vibrationen nach wenigen Schwingungen aus der Struktur herausdämpfen. Im Fall der Titan II jedoch übertrugen sich diese mechanischen Schwingungen in die unter hohem Pumpendruck stehenden Förderleitungen für Brennstoff und Sauerstoff. Dadurch wurden die Brennkammern leicht pulsierend beschickt und auch der Abgasstrahl begann zu pulsieren, was die ursprünglich schwachen mechanischen Schwingungen der Rakete verstärkte. Dieser Rückkopplungseffekt verstärkte sich in wenigen hundert Schwingungen bis zum genannten 2.5 g-Pulsieren der Raketenstruktur: ein typisches Instabilitätsphänomen des komplizierten elastomechanisch-maschinendynamischen Gesamtsystems. Nachdem man diese Ursache erkannt hatte, beseitigte man die unerwünschten Schwingungen durch ein internes, rückkoppelndes Regelsystem.

Solche pulsierenden Druckkräfte können hochgradig nachteilige Wirkungen auf die sehr leichte Tragstruktur einer Rakete ausüben. Brennstoff- und Sauerstofftank der ersten Stufe der Titan II waren dünnste zylindrische Schalenkonstruktionen, diejenigen der zweiten Stufe Kugelschalentanks. Beide Konstruktionen würde man korrekterweise als Folientanks bezeichnen, da sie überhaupt nur in gefülltem Zustand Stabilität besitzen. Derartige leichte Schalenstrukturen beulen oder zerknittern wie Bierdosen, wenn sie in Längsrichtung gedrückt werden. Genau diese Beanspruchung aber wird durch den Startschub ausgeübt, unter welchem ein Beulen der Tankwandungen natürlich unter allen Umständen mit ausreichender Sicherheit zu vermeiden ist. Sicherheiten im Raketenbau sind jedoch klein, sie liegen nur wenig über Eins. Überlagert sich nun den planmäßigen Achsialkräften aus dem Startschub noch eine pulsierende Komponente bestimmter Frequenz, so hängt das Stabilitätsverhalten der Schalentanks weitgehend von dieser Frequenz ab. In weiteren Frequenzbereichen wird kein wesentliches Abweichen vom stabilen Zustand erwartet werden müssen, aber zwischen diesen sicheren Frequenzbereichen gibt es Frequenzinseln, in welchen die Stabilität verloren gehen kann: Die Tanks könnten dann weit von ihrer statistischen Stabilitätsgrenze in Beulschwingungen geraten, die schnell zum Versagen führen würde.

Bei dem geschilderten Stabilitätsphänomenen liegt die Ursache für einen Stabilitätsverlust somit nicht allein in der Lasthöhe, sondern gleichermaßen im Zeitverlauf der Einwirkung, genauer: in der Einwirkungsfrequenz. Daher bezeichnet man die geschilderten Vorgänge auch als kinetische, d.h. bewegungsabhängige Instabilitätsphänomene. Der hier beschriebene Vorgang gehört in die Unterklasse der Parameterinstabilitäten, weil ein mögliches Versagen an Parameter gekoppelt ist, nämlich an die Erregungsfrequenz sowie an die Intensitäten der Grundlast und der Pulslast.

Derartige Parameterinstabilitäten werden in vielen mechanischen Schwingern beobachtet, wenn auf diese mit wechselnden Drehzahlen arbeitende Rotationsmaschinen einwirken. Beispiele hierfür finden sich in Windenergieanlagen, in vielen Getrieben oder auch beim Rad-Schiene-System unserer Bahnen. Allen diesen Beispielen gemeinsam ist ein schwingungsfähiges System, dessen Systemgleichungen zeitabhängige, periodische Koeffizienten enthalten. Kennzeichnend für Parameterinstabilitäten ist, daß diese durch eine instabilitätsfördernde Störung der Ursprungsschwingung virulent werden. Die gestörte Gleichgewichtslage kann für gewisse Verhältnisse einer Eigenfrequenz zur Erregerfrequenz die Fähigkeit zur Instabilität gewinnen, lange bevor sich eine statische Instabilität einstellen würde [5,6]. Dann jedoch kann eine beliebig kleine äußere Störung das Aufschaukeln parametererregter Schwingungen, also die Instabilität, einleiten, die erst durch Nichtlinearitäten des Systems oder seine Zerstörung beendet wird.

Nebenbei bemerkt können parametererregte Schwingungen auch stabilisierend wirken, wie vom Verhalten eines aufrecht stehenden Stabpendels bekannt ist. Ein solches Pendel befindet sich in einem instabilen Gleichgewichtszustand, weil sein Schwerpunkt über seinem Drehpunkt liegt: Die kleinste Störung würde daher zum Umschlagen des Pendels führen. Durch geeignete Schwingungen des Drehpunktes läßt sich nun die bei ruhender Aufhängung offensichtlich stets instabile obere Gleichgewichtslage so stabilisieren, daß wenigstens begrenzte Schwingungen möglich werden.

Doch zurück zur Titan II-Rakete: Vermutlich hat eine Kombination nichtlinearer Aktionen der Raketenstruktur, durch große Deformationen und Plastizierungen, gemeinsam mit parametererregten Stabilisierungseffekten das Projektil bei den Probestarts vor der Zerstörung bewahrt. Als ich Ende der 60er Jahre in die Vereinigten Staaten kam, waren Parameterinstabilitäten an dünnen Schalenstrukturen ein Forschungsthema höchster Aktualität. Die hier skizzierten Einsichten verdankt man weitgehend dem frühzeitigen und umfangreichen Einsatz digitaler sowie analoger Computer. Aber noch immer bilden parametererregte Instabilitäten komplizierter Strukturen, sobald Nichtlinearitäten beteiligt sind, so aufwendige Problemstellungen, daß nur leistungsstärkste Rechenautomaten überhaupt die Kapazität zu einer vollständigen Behandlung besitzen.

3. Computersimulationen und Struktur nichtlinearischer Feldgleichungen

Nach dieser phänomenologischen Schilderung technischer Instabilitäten soll ein weiterer Aspekt meines Themas behandelt werden, nämlich der Einfluß computerorientierter Analysetechniken, sogenannter Computersimulationen, auf die Erforschung der Struktur der nichtlinearen Feldgleichungen.

Die Festkörpermechanik, deren Instabilitätsphänomene hier behandelt werden, beschreibt die Wirkungen von Kräften auf das Deformationsverhalten fester Körper. Damit verknüpft sie die unserer Anschauung zugängliche geometrische, besser kinematische Welt der Deformationen mit der unsichtbaren Welt der Kraftfelder zu einem theoretischen Gebäude, in welchem Universalität und Reproduzierbarkeit, die beiden Grundlagen physikalischer Modellierungstechniken, gewährleistet sein müssen. Seit Galilei ist die Formulierungssprache einer solchen Theorie die Mathematik, durch welche die Mechanik von der qualitativen auf eine quantitative Stufe gehoben worden ist. Derartig mathematisch formulierte physikalische Theorien besitzen eine mathematische Struktur aus Variablen und Operatoren, welche das Lösungsverhalten bestimmt.

Für die Strukturen der festkörpermechanischen Theorien hat man sich bis zur Mitte unseres Jahrhunderts in der technischen Mechanik wenig interessiert. Natürlich wußte man, daß stets Gleichgewicht, Kinematik und Werkstoffverhalten zu modellieren waren, aber die meisten Forschungen waren auf das Aufdecken bestimmter physikalischer Phänomene fixiert. Daher wurden die beteiligten Gleichungen letztlich nur so ineinander substituiert, daß ein lösbares Rand- und Anfangsrandwertproblem entstand.

Dennoch besitzen alle physikalischen Theorien, in der Festkörpermechanik die Deformationsfelder und die Kraftfelder, eine strenge Struktur mit vollendeten Symmetrien [7] und beides erweist sich heute als von großer Bedeutung für eine korrekte numerische Behandlung. Diese Struktur erkannte erstmalig James Clerk Maxwell, einer der bedeutendsten theoretischen Physiker des 19. Jahrhunderts, als er 1862 seine Theorie des Elektromagnetismus veröffentlichte. Maxwell stellte mit großem Erstaunen fest [8], daß die beiden Feldgleichungen der Elektrizität Spiegelbilder derjenigen des Magnetismus waren. In der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik ist diese Struktur erst Mitte unseres Jahrhunderts mit den erweiterten Variationsprinzipien von E. Reissner (1950) und H.C. Hu (1955) abschließend formuliert worden [9,10], allerdings nur für lineare Prozesse. 1957 hat Hermann Schaefer, Ordinarius für Mechanik an der hiesigen Universität, in den Abhandlungen Ihrer Gesellschaft diese Struktur für Platten- und Scheibenmodelle beschrieben [11], selbstverständlich mathematisch korrekt, jedoch physikalisch mit einer anderen Zielsetzung.

Warum sind die mathematischen Strukturen festkörpermechanischer Theorien und deren Symmetrien von so großer Bedeutung für Computersimulationen? Der algebraische Charakter digitaler Computer erlaubt auf diesen nur Näherungslösungen der Rand- und Anfangswertprobleme der Kontinuumsmechanik. Als mathematische Techniken hierzu werden heute überwiegend gebietsweise aufgespannte Variationsverfahren verwandt. In diesen macht man einen plausiblen Näherungsansatz beispielsweise für das Deformationsgeschehen, d.h. für das eine beteiligte Variablenfeld, und gewinnt die Kraftgrößen, das duale Variablenfeld, durch Minimierung eines Residuums. Werden nun die Operatorsymmetrien in beiden Variablenfeldern nicht korrekt modelliert, so kann dies zu vielfältigen und zusätzlichen numerischen Unschärfen führen, welche die Unschärfen der Modellbildung und der Näherungsansätze gerade so akkumulieren, daß das Deformationsverhalten verfälscht wiedergegeben wird.

Instabilitätsphänomene gehören, wie bereits mehrfach erwähnt, zu Problemen der geometrisch nichtlinearen Festkörpermechanik, in welchen die Kraftgrößenfelder zusätzlich mit den Deformationen verkoppelt sind, und die Deformationsfelder mindestens quadratische Glieder ihrer Variablen aufweisen. In ihnen können verfälschte Strukturen der Modelltheorien oder unscharfe Formen der Operatoren der Festkörpermodelle mögliche Tragwerksinstabilitäten so enstellen, daß unbrauchbare Aussagen entstehen. Dieser äußerst aktuelle Forschungszweig ist ein hervorragendes Beispiel dafür, daß weder leistungsstarke Computermethoden noch kontinuumsmechanische Theorien allein zur besseren Simulation führen, sondern daß nur aus ihrer Verbindung Erkenntnisfortschritt zu erwarten ist.

Noch eine zweite Wechselbeziehung zwischen Computersimulationen von Instabilitätsphänomenen und der mathematischen Struktur nichtlinearer Feldgleichungen sei kurz skizziert. Im Jahre 1893 veröffentlichte der russische Mathematiker A. Ljapunow [12] aus Charkow in seiner Dissertation das von mir mehrfach zitierte Stabilitätskriterium, in einer mittels Vektornormen quantifizierten Form. Vor allem aber wies er nach, daß zum Nachweis von Stabilität oder Instabilität überhaupt nicht die vollständigen nichtlinearen Gleichungen untersucht zu werden brauchen. Vielmehr reicht die Analyse eines linearisierten Nachbarzustandes, die erste Variation der Prozeßbeschreibung, völlig aus. In dieser stehen die für das Stabilitätsverhalten maßgebenden Glieder an für die Numerik besonders günstigen Positionen, außerdem sind sie streng lokalisiert, so daß man die bei der Festkörpermodellierung erforderliche Sorgfalt auf bestimmte Punkte konzentrieren kann.

Die Dissertation von Ljapunow geriet bis in die sechziger Jahre dieses Jahrhunderts hinein vollständig in Vergessenheit. Heute zählt sie zu den wichtigsten Grundlagenpublikationen für die Simulation von Instabilitätsphänomenen. Sie hat den numerischen Mathematikern die Augen für die Korrektheit von Integrationsalgorithmen in der Nähe von Instabilitätspunkten geöffnet und der Festkörpermechanik neue Wege zur richtigen Beschreibung der erforderlichen Nichtlinearitäten gewiesen.

Wie ich darzulegen versuchte, stellen Instabilitätsprobleme technischer Systeme komplizierte nichtlineare Aufgabenstellungen dar. Erst in den vergangenen zwei Jahrzehnten, in der Wechselbeziehung zwischen mehreren Disziplinen, vor allem aber in der Auseinandersetzung mit starken Computern, konnten ihre verschiedenen Aspekte tiefer verstanden werden. Hier hat die Computertechnologie und die mit ihr fortentwickelte Numerik entscheidende Anstöße zum tieferen Verständnis komplexer Antwortphänomene liefern können. Deren wissenschaftliche Komplexität ist sicher einer der Gründe für die langjährige randständige Position von Instabilitätsphänomenen in der Mechanik und darüber hinaus in der Technik. Aber wohl nicht ihr einziger!

Als um 1600 das Abendland begann, die Grundlagen der modernen Natur- und Technikwissenschaften zu legen, geschah dies durch eine Renaissance der griechisch-hellenistischen und arabischen Wissenstraditionen, die mindestens 2500 Jahre zurückreichten. In ihnen besaßen der Lauf der Sonne, der Planeten und der anderen Gestirne am Firmament eine dominierende Rolle in der Weise, daß ihr ausmeßbarer kosmischer Takt die über Jahrtausende einzig verläßliche Ordnung verkörperte. „In ewig schnellem Sphärenlauf", wie der Erzengel Gabriel im Prolog des Faust I das Stabilitätsdenken dieser Weltordnung treffend charakterisiert.

Was den Menschen wohl immer als Spiegel göttlicher Ordnung galt, das gestirnte Firmament, hatten Johannes Keppler, der die Ellipsennatur der Planetenbahnen um die Sonne erkannte, und Isaac Newton, der sie mit seinen dynamischen Grundgesetzen erklärte, in die mathematische Sprache einer modernen Wissenschaft gekleidet. Ihr Triumpf, zukünftige Positionen der Himmelskörper zuverlässig vorhersagen zu können, überwandt zwar die Ganzzahlenmystik der antiken und scholastischen Himmelsmechanik, er führte jedoch auch innerhalb eines knappen Jahrhunderts geradewegs in die deterministische Naturphilosophie des Barock. Die parallel hierzu in den Gelehrtenzirkeln des 18. Jahrhunderts sich formende Idee der Maschine, eine der wichtigsten historischen Grundlagen unserer heutigen Technik, war als kleiner menschlicher Kosmos konzipiert, nicht dem Willen Gottes, sondern allein menschlicher Regie unterworfen. Von hier aus wirkt der Determinismus der Aufklärung bis in die technische Zivilisation unseres Jahrhunderts.

In dieser neuen Weltordnung einfacher „göttlicher" Naturgesetze mußten alle Instabilitäten wie teuflischer Unrat wirken. Gerade die geniale Einfachheit der Newton'schen Mechanik hat einen prägenden Einfluß auf die deterministische Komponente des Naturbildes ausgeübt, der bis weit in unsere Zeit hinein wirkt und in welchem Instabilitäten als etwas Absonderliches, bestenfalls Kurioses eingestuft werden. In meinem letzten Abschnitt soll nun an Hand des Systemverhaltens nichtlinearer, periodischer Schwinger noch einmal die Unhaltbarkeit einer solchen Auffassung erläutert werden, wieder vor dem Hintergrund von Computersimulationen.

4. Nichtlineare, periodische Schwinger

Zur Einführung hierzu denken wir uns einen einfachen mechanischen Schwinger, beispielsweise ein Pendel. Als Uhrenpendel sind diese Schwinger für jeden physikalischen Laien das Vorbild des Zuverlässigen, des absolut Determinierten. Die dem Pendel durch Luft- und Lagerreibung entzogene Energie wird ihm intermittierend aus dem Energiereservoir der Feder zurückgegeben. Eine sinnreiche Mechanik, die Unruhe, sorgt dafür, daß die Energiezufuhr stets genau im Takt der Eigenschwingung des Pendels erfolgt, seiner natürlichen Frequenz bei vorgegebenem Ausschlag.

Wie wird sich dieser Schwinger verhalten, wenn er nicht in seiner Eigenfrequenz, aber dennoch periodisch angeregt wird? Versuche zur Beantwortung dieser Frage haben viele Leser schon selbst durchgeführt, beispielsweise mit einer Kinderschaukel: Trifft ein Stoß im richtigen Zeitpunkt, schwingt die Schaukel weiter aus; trifft er sie jedoch gegen die Schwingungsrichtung, wird diese gebremst. Nun schweben mir in meiner Fragestellung allerdings nur sehr kleine Störanregungen und dafür erheblich längere Zeiträume vor, auf die Pendeluhr bezogen vielleicht 100, 1000, oder eine Million Jahre.

Auf den ersten Blick erscheint diese Problemstellung sehr theoretisch. Die Technik kennt jedoch viele schwingende Systeme mit hohen Anregungsfrequenzen. Kraftwerksturbinen beispielsweise regen ihre Umgebung mit 50 Hz an, Industrieturbinen mit bis zu 300 Hz; 100 000 Betriebsstunden bilden bei beiden ein übliches Lebensdauermaß. Kleine Störungen in Form von Unwuchten oder vielfältigen Imperfektionen sind unvermeidbar und somit stets vorhanden. Die Frage nach der Langzeitstabilität schwach gestörter, schwingender Systeme besitzt somit sehr wohl eine erhebliche praktische Bedeutung.

Nun benötigen wir noch eine Technik zum Erkennen möglicher Instabilitäten dieser Art. Henri Poincaré, ein französischer Mathematiker, der sich 1892 mit einer ähnlichen Fragestellung auseinandersetzte [13], erinnerte sich an das bereits damals bekannte stroboskopische Abbildungsverfahren: Hierzu stellen wir uns erneut das Uhrenpendel vor, sein Mittelpunkt sei markiert. Von ihm werde genau in der Schwingungsfrequenz je Schwingung ein Blitzlichtphoto erstellt. Am Ende der Reihenuntersuchung werden alle Einzelaufnahmen auf ein Bild kopiert. Schwang das Pendel während des Versuchs stabil, so muß der markierte Mittelpunkt immer genau an der gleichen Stelle oder an wenigen anderen Punkten abgebildet werden. Bei instabilem Schwingungsverhalten dagegen wird das Gesamtbild aller Mittelpunkte keine erkennbare einfache Struktur aufweisen.

Genau diese Poincarè-Abbildungstechnik verwendet man heute für derartige Stabilitätsnachweise, allerdings wird sie nicht wie geschildert im dreidimensionalen Umgebungsraum angewendet, sondern in einem abstrakteren Phasenraum, der je Systemfreiheitsgrad zwei Dimensionen besitzt.

Poincarè interessierte sich damals für schwach nichtlineare, schwingende Systeme, die mit geringfügig von der Eigenfrequenz abweichender, harmonischer Erregung beaufschlagt waren. Er entdeckte bei seinen Analysen, daß sich kleinste Störungen im Verlaufe der Zeit dramatisch vergrößern können, wenn kritische Parameterkonstellationen von Erregerfrequenz und Nichtlinearität vorhanden waren. Niemand wollte damals die Tragweite dieser Erkenntenis wahrhaben. Heute wissen wir, daß nichtlineare Schwinger, die in der Technik weit verbreitet sind, mit bestimmten nichtlinearen Eigenschaften ein weites Spektrum unterschiedlicher Antwortmöglichkeiten bereithalten: Für bestimmte Parameterkonstellationen kann das System völlig stabil in der Erregerfrequenz schwingen; für andere können stabile Antwortfrequenzen um ganzzahlige, rationale oder irrationale Verhältnisse von der Erregung abweichen. Schließlich kann das System auch völlig instabil antworten, sowohl was seine Frequenz als auch seine Amplitude betrifft.

In diesem letzteren Fall gerät das schwingende System offensichtlich laufend und wiederholt in die für Instabilitäten charakteristische Ambivalenzsituation, in mehreren Schwingungsfrequenzen antworten zu können. Das System durchläuft Frequenzverzweigungen und entscheidet sich nach einem beim augenblicklichen Wissensstand nicht erkennbaren Kriterium für eine Alternative. Dadurch wird das völlig exakt beschreibbare, somit vollständig determinierte System in seinem zukünftigen Betriebsverhalten unvorhersagbar. Der amerikanische Mathematiker James Yorke prägte für dieses heute in vielen Varianten bekannte Instabilitätsphänomen 1979 den Begriff „Deterministisches Chaos“ [14].

In meinem Institut stießen wir vor einigen Jahren ber der Analyse eines nichtlinearen Schwingers, dessen Langzeitverhalten wir im Computer untersuchten, durch Zufall auf dieses Phänomen. Das Poincaré-Mapping bewies während vieler Zyklen Stabilität in einer subharmonischen Frequenz, plötzlich jedoch wurde das System instabil, es driftete ins Chaos. Wir deuteten dies zunächst als numerische Instabilität des verwendeten Integrationsalgorithmus, als Akkumulation von Abbruchfehlern unabhängig vom zu analysierenden System. Eine Verdopplung der Rechnergenauigkeit, das übliche erste Mittel in derartigen Fällen, lies jedoch das Phänomen qualitativ unverändert: immer driftete das System nach einer längeren stabilen Phase ins Chaos.

Inzwischen ist uns natürlich bekannt, daß wir damals ohne ausreichende Kenntnis eines der faszinierendsten Themen der heutigen Forschung tangiert hatten: Die Langzeitstabilität heteronomer, dissipativer dynamischer Systeme wird immer mehr zu einer Herausforderung unseres gesamten naturwissenschaftlichen Weltbildes, unserer abendländischen Metaphysik, ja des in sie eingebetteten Menschenbildes. Hier eine ganz untechnische, jedoch zum Anlaß passende Fragesstellung: Diejenige nach der Stabilität unserers Sonnensystems. Dieses besitzt zwar keine äußere Erregung, dafür ist die Dämpfung praktisch vernachlässigbar; außerdem ist es mit vielen winzigen Störungen übersäht: Unregelmäßig geformten, torkelnden Planetenmonden und Asteroiden. Ohne diese Störungen schwingt das System eindeutig langzeitstabil. Als im Jahre 1801 allein aufgrund der kinematischen Bahnberechnungen von Carl Friedrich Gauß die Wiederentdeckung des kurz nach seiner Erstentdeckung wieder verschwundenen Planetoiden CERES gelang, setzte diese Extrapolation der wenigen Bahndaten natürlich die Stabilität des Systems voraus.

Berücksichtigt man jedoch die erwähnten Störungen, so weisen viele jüngere Forschungen auf die Möglichkeit eines Abdriften des Sonnensystems ins Chaos hin, zumindest müssen sie jede Langzeitvorhersage auf Stabilität in Frage stellen. Die genauesten Computer und sorgfältigsten Algorithmen scheinen heute eine stabile Phase von bestenfalls der halben Lebensdauer des Sonnensystems vorherzusagen. Ist also der „ewig schnelle Sphärenlauf“ ein voreiliges physikalisches Urteil kosmischer Winzlinge? Andererseits kennt die Astronomie wohl keine Anzeichen für eine wesentliche Änderung der Planetenbahnen in den letzten 4,6 Milliarden Jahren. Ist es also womöglich die unzureichende Leistungsfähigkeit heutiger Computer, die eine falsche Interpretation provoziert? Oder sind wir an jene bereits von Kant vorhergesagte Erkenntnisgrenze gestoßen, nach welcher das Wesen der Dinge dem Menschen letztlich unerkannt bleiben muß, eine Barriere, bei deren Überwindung auch von den schnellsten und genauesten Computern keine Hilfe zu erwarten sein wird?

Bereits Poincarè hatte diese Konsequenzen vor Augen, denn entgegen der damaligen Lehrmeinung hielt er die Möglichkeit instabiler Resonanzen im Sonnensystem für denkbar. Ohne das zum Beweis nötige numerische Rüstzeug jedoch mußter er resignieren: „Diese Konsequenzen sind so bizarr, daß ich nicht wage, an ihnen weiter zu arbeiten", ist von ihm überliefert.

5. Schlußbemerkungen

Mein Thema waren Instabilitätsphänomene technischer Systeme vor dem Hintergrund moderner Informationstechniken. Letztere haben in meiner Generation die analytischen Erkenntnisfähigkeiten in bisher nicht vorstellbarer Weise gesteigert. Ich versuchte nachzuweisen, daß die Auseinandersetzung der Festkörpermechanik mit der Numerik und ihren machtvollen Rechenautomaten unser Verständnis instabiler Antwortphänomene auf breiter Front erweitert hat. Aber auch mit diesen Techniken verbleiben nicht uninteressante Fragestellungen, welche möglicherweise von Computern mehr vernebelt als aufgeklärt werden.

Meine Beispiele enstammten der Strukturmechanik, damit betrafen sie deren Kern, die Newton'sche Mechanik. Bereits mehrfach habe ich auf die deterministisch-mechanistischen Konsequenzen dieses kausalen physikalischen Weltkonzeptes hingewiesen, die bereits in der Goethezeit, nämlich 1814, von Pierre Simon de Laplace konsequent zu Ende hinterfragt wurden [15]: Einer Intelligenz, so folgerte er, der zu einem vorgegebenen Zeitpunkt alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie Lage und Geschwindigkeit aller ihrer Elemente bekannt seien, lägen Zukunft und Vergangenheit unserer Welt offen vor Augen. Daß dieser Schlüsselsatz deterministischen Weltverständnisses vor dem Hintergrund vielfältiger instabiler mechanischer Phänomene so nicht zutrifft, habe ich Ihnen versucht zu erläutern.

Natürlich sind viele Instabilitäten technischer Systeme durchaus hinreichend genau berechenbar, insbesondere heute unter Einsatz von Computern. Aber sie beenden im allgemeinen eben die Vorhersagbarkeit der Systemantwort. Um diesen Indeterminismus auszugrenzen, werden in der Technik Systemstabilitäten üblicherweise durch Betriebseinschränkungen ausgeschlossen, sofern sie nicht ohnehin unentdeckt bleiben. In der Natur oder in der menschlichen Gesellschaft aber fehlen uns hierzu sowohl die Kenntnisse als auch die Mittel.

Damit aber treffen Instabilitätsphänomene, sogar die technischen, vermutlich geradewegs die geistigen Wurzeln unserer technisch-naturwissenschaftlichen Zivilisation, welche alle Lebensrisiken durch planmäßiges, vorherbestimmbares Verhalten zu reduzieren, ja auszuschalten bemüht ist. Möglicherweise kollidieren sie darüber hinaus sogar mit dem Menschenbild der abendländischen Ethik, das den Menschen als „vernünftig" planendes und handelndes, selbstverantwortliches Wesen darzustellen bemüht ist. In der mechanistischen Denkweise unserer Alltagswelt ist Vorhersagbarkeit der Verhaltensweisen aller Systeme eine wichtige Funktionshypothese. Die Erkenntnis, daß selbst streng deterministische Systeme durch Instabilitäten unvorhersagbar werden können, beweißt die Fragwürdigkeit gängiger Denkkategorien. Instabilitäten den Rang des Unnatürlichen, Pathlogischen, Mephistophelischen zuzuweisen, wiederspricht vielen jüngeren Forschungen der nichtlinearen Dynamik, in welcher eher Stabilität und Vorhersagbarkeit die Ausnahmen darzustellen scheinen. Gerade die beträchtliche Erweiterung unserer sinnlichen Erfahrungswelt durch die modernen Informationstechniken hat an dieser Infragestellung deterministischer Weltdeutung erheblichen Anteil.

Möglicherweise wird daher die Erkenntnis, daß Instabilitäten die Technik, alle uns umgebende Natur und die gesellschaftlichen Systeme viel stärker als zugegeben durchdringen, das abendländische Bild vom Menschen und das hiermit verbundene, uns vertraute Wertesysteme erheblich grundlegender wandeln, als wir dies heute vorherzusehen bereit sind.

Literatur

[1] Das Neue Testament: Apostelgeschichte des Lukas, 9.1 bis 9.31 sowie 7.57, 8.1 und 8.3.

[2] I. Kant: Kritik der reinen Vernunft. Verlag J. F. Hartknoch, Riga 1781.

[3] J. L. Lagrange: Mécanique Analytique. Paris 1788, Deutsche Übersetzungen 1788 von F. W. A. Murhard, 1811 von H. Servus.

[4] L. Euler: Methodus Inveniendi, Additamentum I: De Curvis Elasticis, Genf 1744.

[5] V. V. Bolotin: The Dynamic Stability of Elastic Systems. Holden-Day, San Francisco 1964.

[6] E. Mettler: Dynamic Buckling. Handbook of Engineering Mechanics, Herausgeber: W. Flügge, McGraw-Hill, New-York 1962.

[7] E. Tonti: On the Formal Structure of Physical Theories. Instituto di Mathematica del Politechnico di Milano, Milano 1975.

[8] J. C. Maxwell: Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities. Proc. Lond. Math. Soc. 3 (1871), 224–232.

[9] E. Reissner: On a variational theorem in elasticity. Journ. Math. Physics 29 (1950), 90–95.

[10] H. C. Hu: On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity. Scientia Sinica 4 (1955), 33–54.

[11] H. Schaefer: Die vollständige Analogie Scheibe-Platte. Abhandl. d. Braunschweig. Wiss. Gesellsch. 8 (1957), 142–164.

[12] A. M. Ljapunow: Problème général de la stabilité du mouvement. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, 9 (1907), 203–475. Nachdruck: Annals of Math. Studies, Princeton 1947.

[13] H. Poincaré: Méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villar & Cie, Paris 1892.

[14] J. A. Yorke, E. D. Yorke: Metastable Chaos. Journ. of Statist. Physics 21 (1979), 263–270.

[15] P. S. de Laplace: Essai Philosophique sur le Probalités, Paris 1814.